COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Sujet commun ENS : Ulm et Cachan) (π')

Préambule, notations.

On notera :
• $||.||$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$ et $((.,.))$ le produit scalaire qui lui est associé,
• $\mathcal{E}_T = \mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^n)$, l'ensemble des applications continues de l'intervalle fermé borné $[0,T]$, $T > 0$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, espace que l'on munit de la norme naturelle $||.||_{\infty,T}$:
pour $f \in \mathcal{E}_T$, $||f||_{\infty,T} = \sup\{||f(t)||;\ t \in [0,T]\}$,
• $\mathcal{E} = \mathcal{C}([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$, l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

On rappelle le résultat suivant. Soient A et B deux réels positifs ou nuls et w une application continue de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$ tels que
$\forall t \in [0,T],\ w(t) \leq A + B\int_0^t w(s)ds.$
Alors pour tout $t \in [0,T]$, on a $w(t) \leq Ae^{Bt}$.

Première partie.

Soit $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Pour $u_0 \in \mathbb{R}^n$ fixé, on définit à l'aide de F et de u_0 une application $\mathcal{T}$ de $\mathcal{E}$ dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ par la formule :

$$(\mathcal{T}u)(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))ds,\ t \geq 0. \tag{1}$$

On suppose que F vérifie

$$\exists L \geq 0,\ \forall u,v \in \mathbb{R}^n\ ||F(u) - F(v)|| \leq L||u - v||. \tag{2}$$

1.1.a. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{E}$, $\mathcal{T}u \in \mathcal{E}$.
1.1.b. Montrer que pour tout $T > 0$ et $u,v \in \mathcal{E}$

$$||\mathcal{T}u - \mathcal{T}v||_{\infty,T} \leq LT||u - v||_{\infty,T}.$$

1.1.c. En déduire par récurrence que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$||\mathcal{T}^m u - \mathcal{T}^m v||_{\infty,T} \leq \frac{L^m T^m}{m!}||u - v||_{\infty,T}$$

($\mathcal{T}^m$ désigne la composée $\mathcal{T}o\mathcal{T}o\ldots o\mathcal{T}$ m fois).
1.2. On fixe $T > 0$.
1.2.a. Montrer qu'il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq m_0$, l'application $\mathcal{T}^m$ admet un point fixe et un seul dans $\mathcal{E}_T$.
1.2.b. En déduire que $\mathcal{T}$ admet un point fixe et un seul dans $\mathcal{E}_T$. On notera u_T ce point fixe.
1.3. Montrer que si $T \geq S > 0$ alors u_T et u_S coïncident sur $[0, S]$.
1.4. Déduire de ce qui précède que l'équation

$$\mathcal{T}u = u \tag{3}$$

admet une solution et une seule dans $\mathcal{E}$.
1.5. Montrer que cette solution u est de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^n$ et qu'elle vérifie (4) et (5) ci-dessous :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \frac{du}{dt}(t) = F(u(t)), \tag{4}$$

$$u(0) = u_0. \tag{5}$$

1.6. Montrer que, réciproquement, si $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n)$ vérifie (4) et (5) alors u est la solution de (3) dans $\mathcal{E}$.
1.7. Soient u_0 et $v_0 \in \mathbb{R}^n$ et F vérifiant (2). On note u la solution de (3) et v celle obtenue en prenant dans (1) v_0 au lieu de u_0, c'est à dire que $\frac{dv}{dt} = F(v)$ et $v(0) = v_0$.
Montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$||u(t) - v(t)|| \leq e^{Lt}||u_0 - v_0||. \tag{6}$$

Deuxième partie.

Soit f une application de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par ∇f l'application gradient de f qui va de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et qui est définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right).$$

Pour $u \in \mathbb{R}^n$, on désigne par $\mathcal{F}_u$ l'ensemble de niveau de f :

$$\mathcal{F}_u = \{v \in \mathbb{R}^n,\ f(v) \leq f(u)\}.$$

Notant $\mathcal{B}(u, R) = \{v \in \mathbb{R}^n,\ ||v - u|| \leq R\}$, la boule fermée de $\mathbb{R}^n$ centrée en u et de rayon $R \geq 0$, on dira que la fonction f vérifie la propriété (P) si pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $\exists R \geq 0$ tel que $\mathcal{F}_u \subset \mathcal{B}(u, R)$.
2.1.a. Montrer que f définie par $f(v) = ||v||^2$ vérifie (P).
2.1.b. Montrer que si f est définie par $f(v) = ((Av, v))$, où A est une matrice carrée (n, n) symétrique à coefficients réels, alors f vérifie (P) si et seulement si A est définie positive.
2.2. Les applications $f_1(v) = -||v||^2$, $f_2(v) = ||v||^4 - ||v||^2$ vérifient-elles (P)?

Dans ce qui suit on fixe une fois pour toutes une application $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vérifiant (P).

2.3. Soit $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et $R_0 > 0$ tels que $\mathcal{F}_{u_0} \subset \mathcal{B}(u_0, R_0)$. On désigne par θ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que $\theta(\sigma) = 1$ pour $\sigma \leq 2$ et $\theta(\sigma) = 0$ pour $\sigma \geq 3$ (on ne demande pas d'établir l'existence d'une telle fonction). Soit alors f_0 la fonction définie par

$$\forall v \in \mathbb{R}^n,\ f_0(v) = \theta\left(\frac{||v - u_0||^2}{R_0^2}\right) f(v).$$

2.3.a. Montrer que $f_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$.
2.3.b. Montrer qu'il existe L_0 (pouvant dépendre de u_0 et R_0) tel que $F = -\nabla f_0$ vérifie (2) avec $L = L_0$.
2.4.a. Soit alors u de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^n$ la solution de (4)-(5) avec $F = -\nabla f_0$ obtenue au cours de la première partie.
Calculer la dérivée de l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ $t \mapsto f_0(u(t))$.
2.4.b. En déduire que

$$\forall t \geq 0\ f_0(u(t)) \leq f_0(u_0) = f(u_0).$$

2.5. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $u(t) \in \mathcal{B}(u_0, R_0)$.
2.6. En déduire que u est solution de (4)-(5) avec $F = -\nabla f$.
2.7. Montrer que pour tout $u_0 \in \mathbb{R}^n$, la limite de $f(u(t))$ lorsque $t \to \infty$ existe. On la note $l(u_0)$.

Troisième partie.

Soit $u_0 \in \mathbb{R}^n$, on désigne par $u \in \mathcal{E}$ la solution de (3)-(4)-(5) obtenue à la question 2.6 (on rappelle que dans ce cas $F = -\nabla f$) et on définit une famille d'applications $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ en posant

$$S(t)u_0 = u(t),\ t \geq 0. \tag{7}$$

3.1. Exemples.
3.1.a. Montrer (vérifier) que si $f(u) = \frac{1}{2}||u||^2$ alors $S(t)u_0 = e^{-t}u_0$.
3.1.b. Montrer que si $f(u) = \frac{1}{4}||u||^4$, $S(t)u_0 = \dfrac{u_0}{\sqrt{1 + 2t||u_0||^2}}$.

On revient au cas général.

3.2. Montrer que
3.2.a. $S(0) = \mathrm{Id}$ (l'application identique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$),
3.2.b. pour tous t_1 et t_2 dans $\mathbb{R}_+$,

$$S(t_1 + t_2) = S(t_1) o S(t_2) = S(t_2) o S(t_1).$$

3.3. Soient $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et R_0 tels que $\mathcal{F}_{u_0} \subset \mathcal{B}(u_0, R_0)$. Montrer que $\forall t \geq 0$, $||S(t)u_0 - u_0|| \leq R_0$.

3.4. En déduire que pour tous u_0 et v_0 de $\mathbb{R}^n$, il existe $M_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$||S(t)u_0 - S(t)v_0|| \leq e^{M_0 t}||u_0 - v_0||.$$

3.5. Soient $s \in \mathbb{R}_+$ et $u_0 \in \mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{O}(s, u_0)$ l'ensemble

$$\mathcal{O}(s, u_0) = \{S(t)u_0,\ t \in [s, +\infty[\}\,.$$

Montrer que $S(t)\mathcal{O}(s, u_0) = \mathcal{O}(s + t, u_0)$.
3.6. Montrer que l'ensemble $\omega(u_0)$ définit par $\omega(u_0) = \cap_{s>0}\mathrm{adh}(\mathcal{O}(s, u_0))$ est un compact connexe non vide de $\mathbb{R}^n$ (pour $X \subset \mathbb{R}^n$, $\mathrm{adh}(X)$ désigne l'adhérence de X dans $\mathbb{R}^n$ pour la topologie usuelle).
3.7. Montrer que pour $v \in \mathbb{R}^n$, (i) et (ii) ci-dessous sont équivalents :
(i) $v \in \omega(u_0)$,
(ii) il existe une suite de réels positifs $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\lim_{m\to\infty} t_m = +\infty$ et $v = \lim_{m\to\infty} S(t_m)u_0$.
3.8. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $S(t)\omega(u_0) = \omega(u_0)$.
3.9. Expliciter $\omega(u_0)$ dans les exemples de la question 3.1.

Quatrième partie.

4.1. Soit $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et $v \in \omega(u_0)$.
4.1.a. Montrer que $f(v) = l(u_0)$ (qui a été définie à la question 2.7).
4.1.b. Montrer que $\nabla f(v) = 0$ (on pourra considérer $v(t) = S(t)v$).
4.2. Cette question est indépendante de la précédente. On désigne par $\mathcal{N}$ l'ensemble des zéros de ∇f:

$$\mathcal{N} = \{v \in \mathbb{R}^n,\ \nabla f(v) = 0\}\,.$$

Pour $v \in \mathbb{R}^n$, on notera $J(v)$ le déterminant

$$J(v) = \det_{1 \leq i,j \leq n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(v)\right).$$

On suppose que

$$\forall v \in \mathcal{N},\ J(v) \neq 0. \tag{8}$$

4.2.a. Montrer que $\mathcal{N}$ est formé de points isolés (on pourra utiliser le théorème d'inversion locale).
4.2.b. En déduire que l'intersection $\mathcal{N} \cap \mathcal{B}(0, R)$ est de cardinal fini quel que soit $R > 0$.
4.3.a. Déduire des questions 3.6, 4.1 et 4.2 que pour tout $u_0 \in \mathbb{R}^n$, $\omega(u_0)$ est un singleton.
4.3.b. Que peut-on dire de $\lim_{t\to+\infty} u(t)$?
4.4. On prend $f(u) = (1 - ||u||^2)^2$.
4.4.a. Expliciter $\mathcal{N}$. Est-il fini?
4.4.b. La propriété (8) a-t-elle lieu?
4.4.c. Soit $u_0 \in \mathbb{R}^n$, expliciter $\omega(u_0)$.
4.4.d. Que pouvez-vous conclure?